数理解析研究所講究録
1177 巻 2000 年 37-39

Moduli Spaces of Noncommutative Tori

都立大学 理学研究科　樋口 仁巳 (Hitoshi Higuchi)

Yang-Mills 場は、重力を除く３つの相互作用を統一して記述できるため、物理学において有効な理論とされてきた。これを記述する幾何構造は４次元球面上の $SU(2)$ 主バンドルである。

さて、C^∞-多様体 M 上のベクトルバンドルの滑らかな切断全体の空間は、有限生成射影 $C^\infty(M)$-加群になっていることに注意すると、「量子化された多様体」の上で Yang-Mills 理論を議論すること可能であることを示唆する。実際、次の Connes-Rieffel による非可換トーラス $\mathfrak{A}_\theta^\infty$ 上の有限生成射影 C^*-加群 $\mathfrak{E}$ のモジュライ空間 $\mathfrak{X}_{\mathfrak{A}_\theta^\infty}(\mathfrak{E})$ の研究がある：

定理 [Connes-Rieffel]
$\mathfrak{E}$ が $\mathfrak{A}_\theta^\infty$ 上の極小有限生成射影加群のとき、$\mathfrak{E}$ のモジュライ空間は 2 次元トーラスに同型である。

そこでは、(1) Hisenberg 加群上の特別な接続の構成、(2) Hisenberg 群の Schrôdinger 表現の一意性 (3) $\mathfrak{A}_\theta^\infty$ 上の有限生成射影加群の分類理論、というアイデアを用いて証明されているが、$\mathfrak{A}_\theta^\infty$ をサークル環の滑らかな部分で近似するという次の定理を用いると著しく容易に証明される：

定理 [樋口]
$\mathfrak{A}_\theta^\infty$ の Fréchet*-部分環 $\mathfrak{A}_n^\infty$ で $(M_{q_n} \oplus M_{q'_n}) \otimes C^\infty(\mathbb{T})$ に同型なものと、埋め込み $\iota_{n,n+1}^\infty : \mathfrak{A}_n^\infty \to \mathfrak{A}_{n+1}^\infty$ が存在して、Fréchet*-環として $\mathfrak{A}_\theta^\infty = \varinjlim(\mathfrak{A}_n^\infty, \iota_{n,n+1}^\infty)$ となっている。ただし、$\{q_n\}, \{q'_n\}$ は θ の連分数展開に付随する自然数列。

ー埋め込み $\iota_{n,n+1}^\infty$ の構成法ー

行列環のランクは $q_{n+1} = a_n q_n + b_n q'_n$, $q'_{n+1} = c_n q_n + d_n q'_n$ とする。

x と y はそれぞれ $M_{q_n}, M_{q'_n}$ の元、z は $C^\infty(\mathbb{T})$ を生成するユニタリ元、ϕ_n は n-time around embedding とすると、埋め込みは次のように構成される。

$$
\begin{aligned}
&\iota^{\infty}_{n,n+1}((x \oplus y) \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{T}}) \\
&= (((\mathbf{1}_{a_n} \otimes x) \oplus (\mathbf{1}_{b_n} \otimes y)) \oplus ((\mathbf{1}_{c_n} \otimes x) \oplus (\mathbf{1}_{d_n} \otimes y))) \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{T}} \\
&\iota^{\infty}_{n,n+1}((\mathbf{1}_{q_n} \oplus \mathbf{1}_{q'_n}) \otimes z) \\
&= ((\mathbf{1}_{a_n} \otimes \phi_{q_n}(z)) \oplus (\mathbf{1}_{b_n} \otimes \phi_{q'_n}(z))) \\
&\oplus ((\mathbf{1}_{c_n} \otimes \phi_{q_n}(z)) \oplus (\mathbf{1}_{d_n} \otimes \phi_{q'_n}(z)))
\end{aligned}
$$

このように埋め込みを定義すると、帰納極限の C^*-環は単純、unital かつ tracial state が唯一存在し、さらにK群がそれぞれ $\mathbb{Z}^2$ に order 同型となる。よって [2] より、帰納極限は $\mathfrak{A}_\theta$ に同型になることに注意しておく。

－ $\mathfrak{A}_n = (M_{q_n} \oplus M_{q'_n}) \otimes C(\mathbb{T})$ 上の微分 $\delta_{(n)}$ の構成法－

$M_n \otimes C(\mathbb{T})$ 上の微分 δ_n を、

$$
\delta_n = \mathrm{ad}[0,1,\cdots,n-1] \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{T}} + \mathrm{Id}_n \otimes nz\frac{d}{dt}
$$

と書くことにすると、これは n-time around embedding と可換。これと、

$$
\begin{gathered}
D_1 = ([0,1,\cdots,q_n - 1] \oplus [0,1,\cdots,q'_n - 1]) \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{A}_1 \\
D_{n+1} = \iota_{n,n+1}(D_n) \in \mathfrak{A}_{n+1} \quad (n \geq 1)
\end{gathered}
$$

を用いて、次のように構成する。

$$
\delta_{(1)} = \begin{cases} \mathrm{ad}\, D_1 & \text{on } (M_{q_1} \oplus M_{q'_1}) \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{T}} \\ \delta_{q_1} \oplus \delta_{q'_1} & \text{on } (\mathbf{1}_{q_1} \oplus \mathbf{1}_{q'_1}) \otimes C^{\infty}(\mathbb{T}) \end{cases}
$$

$$
\delta_{(n+1)} = \begin{cases} \mathrm{ad}\, D_{n+1} \quad \text{on } \left(M_{q_{n+1}} \oplus M_{q'_{n+1}}\right) \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{T}} \\ \left((\mathbf{1}_{a_n} \otimes \delta^{(1)}_{(n)}) \oplus (\mathbf{1}_{b_n} \otimes \delta^{(2)}_{(n)})\right) \\ \oplus \left((\mathbf{1}_{c_n} \otimes \delta^{(1)}_{(n)}) \oplus (\mathbf{1}_{d_n} \otimes \delta^{(2)}_{(n)})\right) \quad \text{on } \mathrm{Im}\, \iota_{n,n+1} \quad (n \geq 1) \end{cases}
$$

ただし、$\delta^{(k)}_{(n)}$ $(k=1,2)$ は $\delta_{(n)}$ の第 k 成分への制限である。このように構成すると、埋め込み $\iota^{\infty}_{n,n+1}$ と可換となる。

先の定理を利用すると次の定理が導かれる：

定理 [樋口-高井] 任意の $\mathfrak{A}^{\infty}_\theta$ 上の有限生成射影 C^*-加群 $\mathfrak{E}$ に対し $\mathfrak{A}^{\infty}_n$ 上の有限生成射影 C^*-加群 $\mathfrak{E}_n$ が存在して、

$$
\mathfrak{X}_{\mathfrak{A}^{\infty}_\theta}(\mathfrak{E}) \cong \varinjlim \left(\mathfrak{X}_{\mathfrak{A}^{\infty}_n}(\mathfrak{E}_n), \mathfrak{X}(\iota^{\infty}_{n,n+1})\right) \cong \mathbb{T}^2
$$

となる。ただし、$\mathfrak{X}(\iota_{n,n+1}^{\infty})$ は、$\iota_{n,n+1}^{\infty}$ から導かれたモジュライ空間列の埋め込み写像。

証明のアイデアは、(1) $\mathfrak{X}_{\mathfrak{A}_n^{\infty}}(\mathfrak{A}_n^{\infty})$ が $\mathbb{T}^2$ に同型であること、(2) $\mathfrak{X}(\iota_{n,n+1}^{\infty})$ が可逆であること、を示すことにある。

さて単純 AT-環として、次の例が代表的である：

	$\mathfrak{A}_\theta$	Bunce-Dedence	Blackadar's
stable rank	1	1	1
real rank	0	0	1
unique tr.state	O.K.	O.K.	O.K.
K_0	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}[[\frac{1}{2}]]$	$\mathbb{Z}$
K_1	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$	0
projection	non trivial	non trivial	trivial
C^∞-structure	$\delta_{(n)}$	$\delta_{(n)}$	(?)

これら３つの例をたたき台にして、「任意の単純 AT-環 $\mathfrak{A}$ に微分構造が導入できる場合に、その可微分部分 $\mathfrak{A}^\infty$ 上の有限生成射影加群 $\mathfrak{E}$ について、それを近似するサークル環の可微分部分 $\mathfrak{A}_n^\infty$ 上の有限生成射影加群 $\mathfrak{E}_n$ が存在して、$\mathfrak{E}$ 上のモジュライ空間が、$\mathfrak{E}_n$ のモジュライ空間の帰納極限の形で書けるか？」という今後の課題が考えられる。(以上)

参考文献

[1] A.Connes.,M.A.Rieffel. Yang-Mills for non-commutative two tori. Contemp.Math.No. 62,pp237–266(1987).

[2] G.A.Elliott. On the classification of C^*-algebras of real rank zero Jour.Reine.Ange.Math.No 443,pp179–219(1993).

[3] G.A.Elliott.,D.E.Evans. The structure of the irrational rotation C^*-algebra. Annals Math.No. 138,pp477-501(1993).

[4] H.Higuchi. The smooth structure of noncommutative tori and its applications. preprint.

[5] H.Higuchi.,H.Takai. Moduli spaces of noncommutative tori. preprint.

[6] A.Kishimoto. Unbounded derivations in AT algebras. preprint.